



Changes in Expectation of Life and Annuity Rate: Entropy Approach*

Funda KARAMAN¹

Keywords

Annuity Cost;
Entropy; Longevity;
Mortality;
Rectangularization.

Abstract

The changes on force of mortality rates has important effect on life expectancy and life annuity costs. Keyfitz (1985) introduced the concept of entropy in the context of continuous changes in life expectancy. He showed that high level of entropy means that reduction in force of mortality rates would have an important impact on life expectancy.

This paper presents applications of the concept of entropy to expectation of life and annuity costs for Turkish mortality data. It is found that rectangularization is important mortality risk for Turkish mortality data. The lower rate of interest, the higher is the value of entropy, indicating a higher effect of longevity risk on the annuity costs.

Article History

Received
5 Nov, 2022
Accepted
19 Dec, 2022

Beklenen Yaşam Süresi ve Anüite Fiyatlarındaki Değişim: Entropi Yaklaşımı*

Anahtar Kelimeler

Annüite Fiyatı;
Entropi; Uzun
Ömürlülük;
Ölümlülük;
Dikdörtgenleşme.

Özet

Anlık ölüm hızlarındaki değişimin beklenen yaşam süresi ve hayat annüitesinin fiyatı üzerinde çok önemli etkisi vardır. Keyfitz (1985) çalışmasında, beklenen yaşam süresindeki sürekli değişimi göstermek amacıyla entropi kavramını tanıtmıştır. Bu çalışmada, anlık ölüm hızındaki azalmanın beklenen yaşam süresi üzerindeki etkisi önemli olduğunda entropi seviyesinin yüksek olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bu çalışmada, Türkiye ölüm verisi için entropi kavramının beklenen yaşam süresi ve annüite fiyatı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Türkiye ölüm verisi için dikdörtgenleşmenin önemli bir ölümlülük riski olduğu sonucu elde edilmiştir. Faiz oranı düşük olduğunda yüksek entropi değeri, annüite fiyatı üzerinde uzun ömürlülük riskinin önemli etkiye sahip olduğunu göstermektedir.

Makale Geçmişi

Alınan Tarih
5 Kasım 2022
Kabul Tarihi
19 Aralık 2022

* Bu çalışma "15. International Conference of Strategic Research on Scientific Studies and Education" kapsamında sunulmuş, özet kitabında yer almış ve geri bildirimler sonucu makaleye dönüştürülmüştür.

¹ Corresponding Author. ORCID: 0000-0002-4177-9247. Dr., Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, msucu@hacettepe.edu.tr

1. Giriş

Anlık ölüm hızlarındaki değişimin beklenen yaşam süresi üzerindeki etkisinin incelenmesi demografi bilimcileri ve hayat annüite oranları üzerindeki etkisinin incelenmesi ise aktüerler tarafından oldukça önemlidir (Booth & Tickle, 2008:4).

Keyfitz (1985)'ten önce yapılan çalışmalarda kesikli beklenen yaşam süresindeki beklenen değer ve varyans değişimleri incelenmiştir (Haberman vd., 2011:199). Keyfitz (1985) çalışmasında beklenen yaşam süresindeki sürekli değişimi incelemek amacıyla entropi kavramı tanıtılmıştır. Bu çalışmada, anlık ölüm hızındaki değişim yüksek entropi değerine sahip nüfusu düşük entropi sahip nüfusa göre daha hızlı etkilediği görülmüştür.

Bu çalışmada, 1980-2012 yılları arasında cinsiyet ayrımındaki TÜİK (Türkiye İstatistik Kurumu)'ten alınan, beşerli yaş gruplarına göre ölüm sayıları ve yıl ortası nüfus verisi kullanılarak, Keyfitz (1985) çalışmasında tanıtılan entropi yaklaşımıyla, beklenen yaşam süresindeki ve hayat annüitesi fiyatındaki değişim incelenerek elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, beklenen yaşam süresi ve hayat annüitesi fiyatı için entropi kavramı tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde kadın ve erkek nüfusuna ilişkin Türkiye verisi incelenmiş, beklenen yaşam süresi ve hayat annüite fiyatı için entropi değerleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

2. Entropi

Çalışmanın bu bölümünde, ilk olarak doğumda beklenen yaşam süresi için entropi ölçümü (H) tanıtılacak ve daha sonra ise bu entropi ölçümünün annüite oranları üzerindeki etkisi incelenecektir.

2.1. Entropi ve beklenen yaşam süresi

Entropi kavramı, ilk olarak 1976 yılında Demetrius tarafından tüm yaş aralığı için anlık ölüm hızındaki oransal değişimin beklenen yaşam süresi üzerindeki etkisini ölçmek amacıyla kullanılmıştır [4].

(x) yaşındaki bir birey için anlık ölüm hızı μ_x ve izleyen yılda tüm yaşlardaki anlık ölüm hızındaki azalma oranı ϕ olarak tanımlandığında, (0) yaşındaki bir bireyin (x) yaşına kadar yaşaması olasılığı,

$${}_x p_0^* = \exp \left[-\int_0^x \mu_a^* da \right] = \exp \left[-\int_0^x (1+\phi) \mu_a da \right] = ({}_x p_0)^{(1+\phi)} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Doğumda beklenen yaşam süresi de şu şekilde tanımlanmaktadır:

$${}^o e_0^* = \int_0^w ({}_x p_0)^{(1+\phi)} da \quad (2)$$

Burada w ölümlülük modelindeki en yüksek yaşı göstermektedir. Beklenen yaşam süresinde tanımlanan ϕ 'deki değişimin etkisi,

$$\frac{d {}^o e_0^*}{d \varphi} = \int_0^w \ln({}_a p_0) ({}_a p_0)^{(1+\varphi)} da \quad (3)$$

şeklinde elde edilir. (3) eşitliğinde entropi değerlerinin pozitif olması mümkün değildir. $\varphi = 0$ komşuluğunda Taylor açılımı kullanıldığında (3) eşitliği,

$$\frac{\Delta {}^o e_0}{{}^o e_0} \cong \frac{\int_0^w \ln({}_a p_0) ({}_a p_0)^{(1+\varphi)} da}{\int_0^w {}_a p_0 da} \varphi = -H \varphi \quad (4)$$

olur. Burada, H değeri entropi olarak tanımlanmıştır [2].

2.2. Entropi ve annüite fiyatları

Kesim 2.1'deki ile aynı varsayım altında (x) yaşındaki birey için sürekli bir tam hayat annüitesinin değeri şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\bar{a}_x^* = \int_0^{\infty} ({}_t p_x)^{(1+\varphi)} \exp[-\delta t] dt \quad (5)$$

Burada; δ , anlık faiz oranını göstermektedir. Annüite oranında tanımlanan φ 'deki değişimin etkisi,

$$\frac{d}{d \varphi} \bar{a}_x^* = \int_0^{\infty} \ln({}_t p_x) ({}_t p_x)^{(1+\varphi)} \exp[-\delta t] dt \quad (6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada Taylor açılımı kullanıldığında şu şekilde elde edilmektedir:

$$\frac{\Delta \bar{a}_x^*}{\bar{a}_x^*} = -H_x(\delta) \varphi \quad (7)$$

Burada,

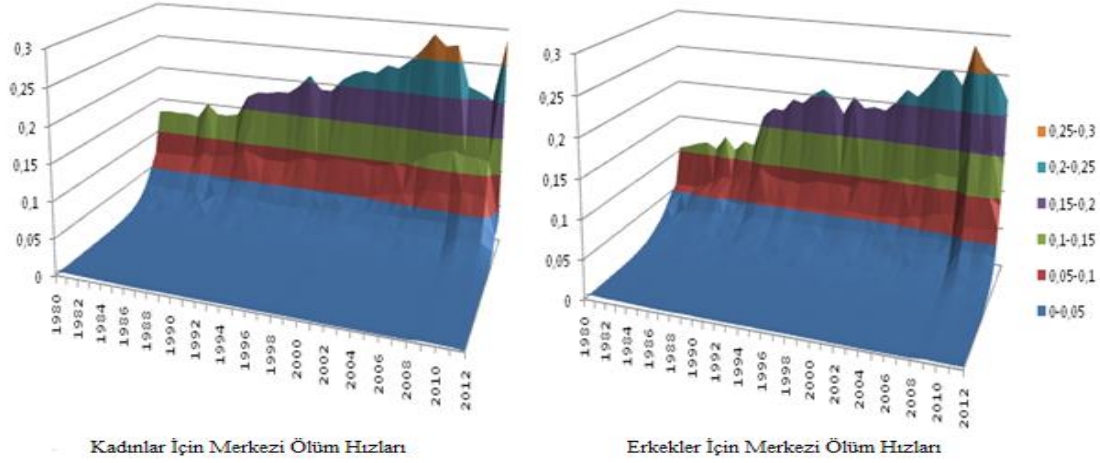
$$H_x(\delta) = - \frac{\int_0^{\infty} \ln({}_t p_x) ({}_t p_x) \exp[-\delta t] dt}{\int_0^{\infty} ({}_t p_x) \exp[-\delta t] dt}$$

olmaktadır. $H_x(\delta)$ değeri, annüite fiyatının entropi değeri olarak tanımlanmaktadır.

3. Uygulama

Bu bölümde, 1980-2012 yılları arasında Türkiye için cinsiyet ayrımında ölüm sayıları ve riske maruz kalan birim sayılarından elde edilen anlık ölüm hızları ve entropi değerleri incelenmiştir. Kadın ve erkekler için yaşa göre anlık ölüm hızları Şekil 1'de verilmiştir.

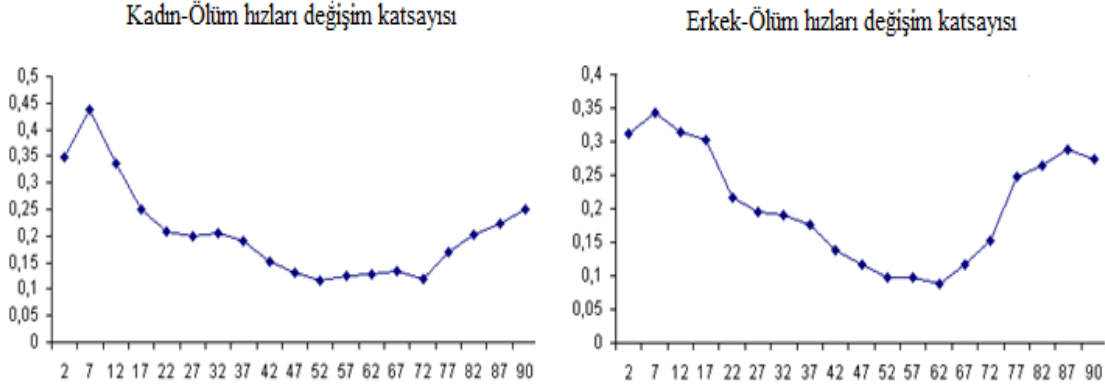
Şekil 1. Kadın ve Erkekler İçin Anlık Ölüm Hızları



Şekil 1 incelendiğinde, kadın ve erkeklerin anlık ölüm hızlarının farklı değişim yapısına sahip olduğu ve yıldan yıla önemli biçimde değiştiği görülmektedir. (0)-(20) ve (60)-(80) yaş aralıklarında kadınların anlık ölüm hızları, erkeklerin anlık ölüm hızlarından daha yüksektir. Ayrıca kadınların anlık ölüm hızlarındaki değişim, erkeklerin anlık ölüm hızlarındaki değişimden daha fazladır.

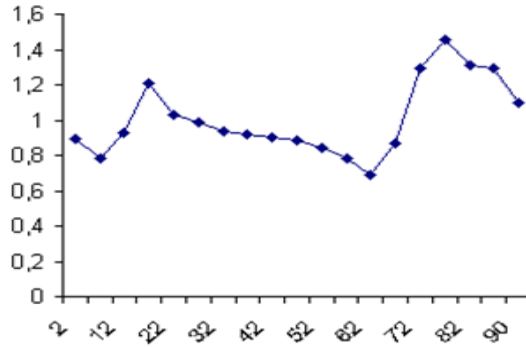
Kadın ve erkek anlık ölüm hızları için yaşa göre değişim katsayıları (variability coefficient) Şekil 2’de verilmiştir:

Şekil 2. Kadın ve Erkekler İçin Yaşa Göre Değişim Katsayısı



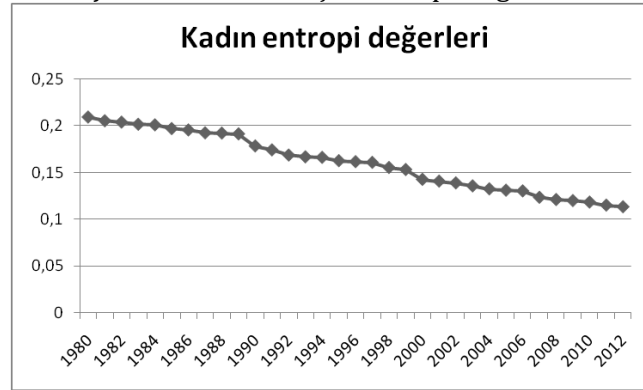
Kadın ve erkek nüfusu için anlık ölüm hızları değişim katsayısı, konveks bir fonksiyon olup, 20’de küçük ve 70’den büyük yaşlar için diğer yaşlara göre daha büyük değerler almaktadır. Yaşlara göre erkeklerin anlık ölüm hızlarındaki değişim katsayısının, kadınların anlık ölüm hızlarındaki değişim katsayısına oranı Şekil 3’te verilmiştir:

Şekil 3. Değişim Katsayısı Oranı

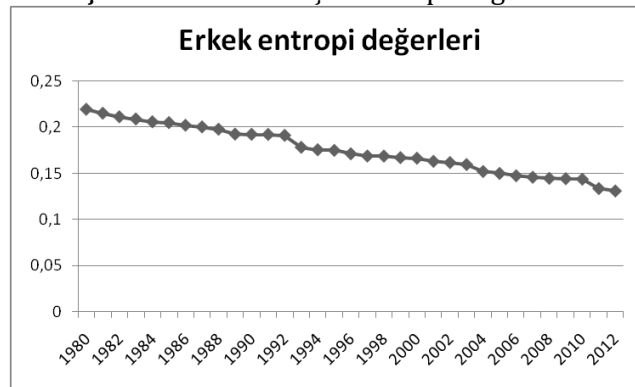


15-25 yaş aralığı ve 70'den büyük yaşlar için erkeklerin merkezi ölüm hızı değişim katsayısının kadınların merkezi ölüm hızı değişim katsayısına oranı 1'den büyüktür. Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3 incelendiğinde, erkek ve kadınların anlık ölüm hızlarının ayrı ayrı modellenmesi gerektiği görülmüştür. (4) eşitliği kullanılarak kadınlar için entropi değerleri Şekil 4'te ve erkekler için entropi değerleri Şekil 5'te verilmiştir.

Şekil 4. Kadınlar İçin Entropi Değerleri



Şekil 5. Erkekler İçin Entropi Değerleri



2008-2012 yılları için kadın ve erkekler için beklenen yaşam süreleri ve entropi değerleri Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Kadın ve Erkekler İçin Beklenen Yaşam Süreleri ve Entropi Değerleri

YIL	KADIN		ERKEK	
	Beklenen Yaşam Süresi	Entropi Değeri	Beklenen Yaşam Süresi	Entropi Değeri
2008	75,80	0,120948	71,40	0,144648
2009	76,10	0,119854	71,50	0,144266
2010	76,70	0,118213	71,70	0,143717
2011	77,10	0,114949	72,00	0,133674
2012	79,20	0,113196	74,70	0,131073

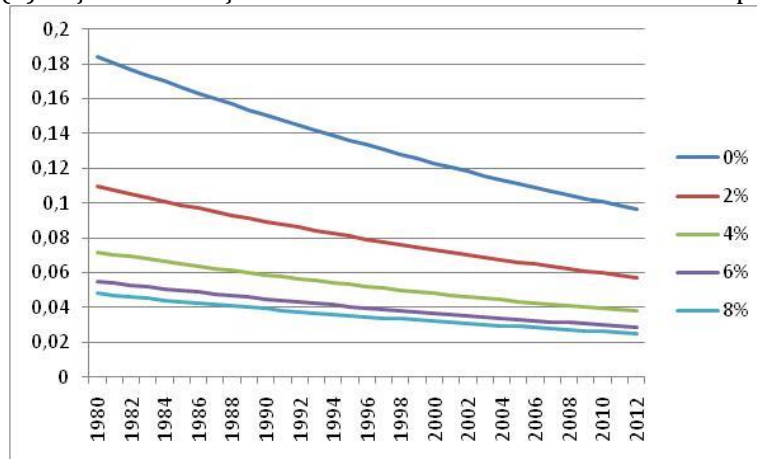
Entropi değerleri pozitif büyüklüğe sahiptir. Zaman içinde ölüm oranlarında düşme gerçekleştikçe ölümün ileri yaşlarda gerçekleşeceği beklenmekte olup nüfus yoğunluğunun orta ileri yaşlarda artması (rectangularization) ve bu durumda entropi değerinin sıfıra yaklaşması beklenmektedir (Nagnur,1986:95). Sonuç olarak, kadınlar için entropi değerleri erkekler için entropi değerlerine göre daha düşük olduğu görülmektedir. Cinsiyet ayrımı yapılmadan 2008-2012 yılları için ortanca yaş değerleri (Pitacco et al.,2009:128) Çizelge 2’de verilmiştir.

Çizelge 2. Ortanca Yaş Değerleri

Yıl	Ortanca Yaş
2008	28,50
2009	28,80
2010	29,20
2011	29,70
2012	30,10

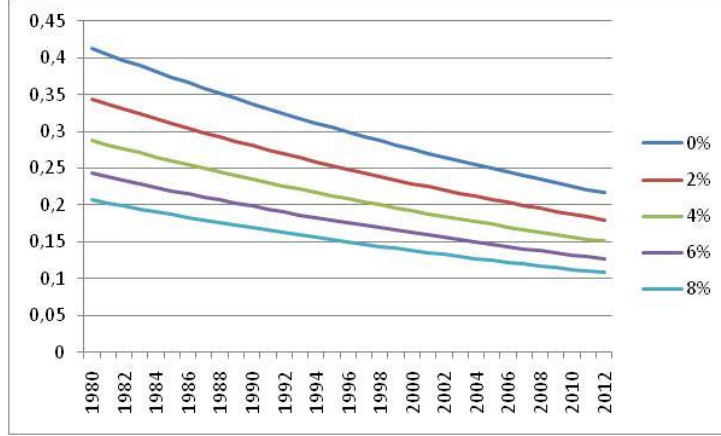
Çizelge 2’de de görüldüğü üzere dikdörtgenleşme (rectangularization) sorununun olduğu görülmektedir. %0, %2, %4, %6 ve %8 anlık faiz oranlarına göre (0) yaş için (7) eşitliğinde tanımlanan entropi değerleri kadınlar için uygulandığında elde edilen entropi değerleri Şekil 6’da verilmiştir.

Şekil 6. (0) Yaş-Kadınlar İçin Bazı Anlık Faiz Oranlarına Göre Entropi Değerleri



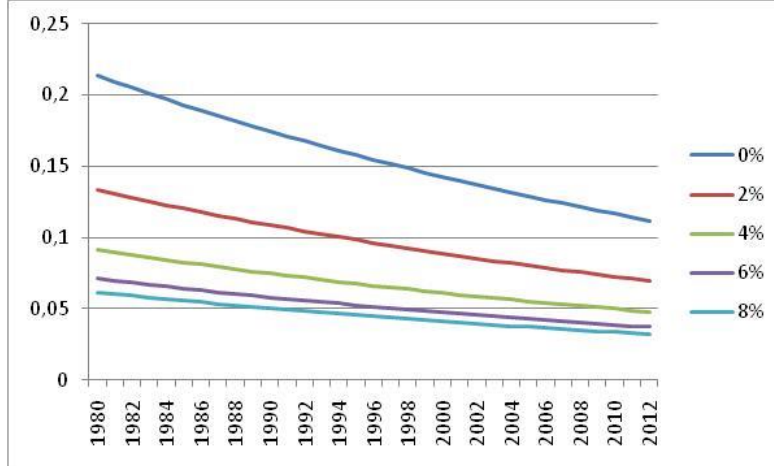
%0, %2, %4, %6 ve %8 anlık faiz oranlarına göre (60) yaş için (7) eşitliğinde tanımlanan entropi değerleri kadınlar için uygulandığında elde edilen entropi değerleri Şekil 7'de verilmiştir.

Şekil 7. (60) Yaş-Kadınlar İçin Bazı Anlık Faiz Oranlarına Göre Entropi Değerleri



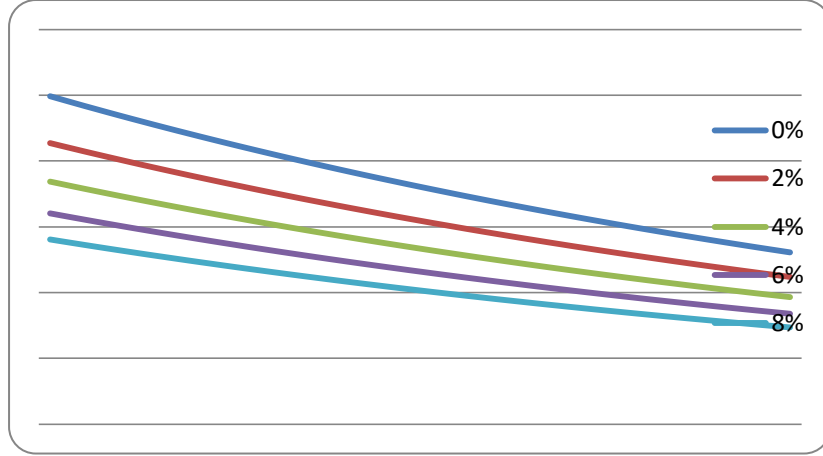
%0, %2, %4, %6 ve %8 anlık faiz oranlarına göre (0) yaş için (7) eşitliğinde tanımlanan entropi değerleri erkekler için uygulandığında elde edilen entropi değerleri Şekil 8'de verilmiştir.

Şekil 8. (0) Yaş-Erkekler İçin Bazı Anlık Faiz Oranlarına Göre Entropi Değerleri



%0, %2, %4, %6 ve %8 anlık faiz oranlarına göre (60) yaş için (7) eşitliğinde tanımlanan entropi değerleri erkekler için uygulandığında elde edilen entropi değerleri Şekil 9'da verilmiştir.

Şekil 9. (60) Yaş-Erkekler İçin Bazı Anlık Faiz Oranlarına Göre Entropi Değerleri



4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, 1985 yılında Keyfitz tarafından yapılan çalışmada tanımlanan entropi yaklaşımı kullanılarak beklenen yaşam süresi ve (0) ile (60) yaş için değişik anlık faiz oranları için hayat annüitesi fiyatındaki değişim incelenmiştir.

Beklenen yaşam süresindeki sürekli değişim incelendiğinde kadınlar için dikdörtgenleşmenin (rectangularization) erkeklere göre daha fazla olduğu sonucu elde edilmiştir. Ayrıca kadınlar için uzun ömürlülük riski, erkeklere göre daha yüksektir.

Hayat annüitesi fiyatlarındaki değişim incelendiğinde, entropi değerinin yüksek olduğu ve anlık faiz oranının düşük olması durumunda uzun ömürlülük riski (longevity risk) hayat annüitesinin fiyatı üzerinde önemli etkiye sahip olduğu görülmektedir. Bu durum faiz oranının düşük olduğu gelişmiş ülke piyasalarında uzun ömürlülük riskinin önemli olduğunu göstermektedir.

Kaynakça

- Booth H., Tickle L.(2008), "Mortality and forecasting: a review of methods", **Annals of Actuarial Science**, 3, 3-43.
- Haberman S., Khalaf-Allah M., Verrall R. (2011), "Entropy, longevity and the cost of annuities", **Insurance: Mathematics and Economics**, 48, 197-204.
- Keyfitz N. (1985), **Applied Mathematical Demography**, Second Edition, Springer-Verlag, New York.
- Khalaf-Allah M. (2007), **Stochastic analysis of longevity and investment risk in the context of life annuities**, Ph.D. Thesis, Cass Business School, City University, London.
- Nagnur D. (1986), "Rectangularization of the survival curve and entropy:the Canadian experienc"e, 1921-1981, **Canadian Studies in Population**, 13, 83-102.
- Nusselder M.A., Mackenbach J.P. (1996), "Rectangularization of the survival curve in the Netherlands 1950-1992", **The Gerontologist**, 36, 773-782.
- Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A.-M. (2009), **Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business**, *Oxford University Press*, Oxford.



© Copyright of Journal of Strategic Research in Social Science (JoSReSS) is the property of SRA (Science Research Associates) Strategic Research Academy & Academic Publishing[©] and its content may not be copied or emailed to multiple sites or posted to a listserv without the copyright holder's express written permission. However, users may print, download, or email articles for individual use.